112	**Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications.**	Pivot de Gauss (160)	Tauvel

K est un corps commutatif. E K-ev de dimension q≥1.

$e=(e_1,\dots,e_q)$ *base de E.*

S_q groupe symétrique d'ordre q. Si $\sigma\in S_q$, on note $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ.(1)

$GL_q(K)$: groupe des matrices q-carrées inversibles (det≠0).

$SL_q(K)$: groupe spécial linéaire, matrices de det=1, sg distingué de GL_q(E).

I. Opérations élémentaires.

Def 1: Soient n, p ∈ℕ*, et $M\in \mathrm{M}_{n,p}$.

On appelle **opération élémentaire** sur M toute opération de l'un des types suivants:

(i) $L_i\to L_i+\lambda L_j$, avec $j\neq i$ et $\lambda\in K$

(ii) $C_i\to C_i+\lambda C_j$, avec $j\neq i$ et $\lambda\in K$

(iii) $L_i\to \alpha L_i$, avec $\alpha\in K^*$

(iv) $C_i\to \alpha C_i$, avec $\alpha\in K^*$

(v) $L_i\leftrightarrow L_j$, avec $j\neq i$

(vi) $C_i\leftrightarrow C_j$, avec $j\neq i$

On va traduire chacune de ces opérations par une multiplication à droite ou à gauche par une matrice convenable.

A. Matrices de permutations.

Pour σ∈S_q, on pose $u_\sigma\in GL(E)$

t.q. $\forall i\in[\![1;q]\!], u_\sigma(e_i)=e_{\sigma(i)}$. (2)

Def 2: Soit $M_\sigma=Mat(u_\sigma;e)=[\alpha_{i,j}]$, avec $\alpha_{i,j}=\delta_{i,\sigma(j)}$.

M_σ est la **matrice de permutation** associée à σ.

On a permuté les colonnes de la matrice identité. (3).

Prop 1: Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$ et $A\in M_{n,p}$.

(i)Soient $i,j\in[\![1,n]\!]$, distincts, et $\tau\in S_n$ la transposition (i,j). La matrice $M_\tau.A$ se déduit de la matrice A par l'opération élémentaire $L_i\leftrightarrow L_j$.

(ii)Soient $i,j\in[\![1,p]\!]$, distincts, et $\tau\in S_p$ la transposition (i,j). La matrice $A.M_\tau$ se déduit de la matrice A par l'opération élémentaire $C_i\leftrightarrow C_j$.

B. Matrices de dilatations.

Soient $i\in[\![1,q]\!]$ et $\lambda\in K^*$.

On note $(E_{kl})_{k\in[\![1,q]\!],\ l\in[\![1,q]\!]}$ la base canonique de M_q.

Def 3: Soit $D_i(\lambda)\in GL_q(K)$ la matrice définie par:

$D_i(\lambda)=E_{11}+\dots+E_{i-1,i-1}+\lambda E_{ii}+E_{i+1,i+1}+\dots+E_{qq}$

$=I_q+(\lambda-1)E_{ii}$. On dit que $D_i(\lambda)$ est une **matrice de dilatation** de rapport λ. (4).

Prop 2: Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$, $A\in M_{n,p}$ et $\lambda\in K^*$.

(i)Soient $i\in[\![1,n]\!]$, et $D_i(\lambda)\in M_n$. La matrice $D_i(\lambda).A$ se déduit de la matrice A par l'opération élémentaire $L_i\to\lambda L_i$.

(ii) Soient $i\in[\![1,p]\!]$, et $D_i(\lambda)\in M_p$. La matrice $A.D_i(\lambda)$ se déduit de la matrice A par l'opération élémentaire $C_i\to\lambda C_i$.

C. Matrices de transvections.

Soient $i,j\in[\![1,q]\!]$, distincts, et $\lambda\in K$.

Def 4: $B_{ij}(\lambda)=I_q+\lambda E_{ij}\in SL_q(K)$ est une **matrice de transvection**. (5).

Prop 3: Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$, $A\in M_{n,p}$ et $\lambda\in K$.

(i)Supposons n≥2. Soient $i,j\in[\![1,n]\!]$, distincts et $B_{ij}(\lambda)\in M_n$. La matrice $B_{ij}(\lambda).A$ se déduit de la matrice A par l'opération élémentaire $L_i\to L_i+\lambda L_j$.

(ii)Supposons p≥2. Soient $i,j\in[\![1,p]\!]$, distincts et $B_{ij}(\lambda)\in M_p$. La matrice $A.B_{ij}(\lambda)$ se déduit de la matrice A par l'opération élémentaire $C_i\to C_i+\lambda C_j$.

II. Propriétés.

Prop 4: Soient n,p∈ℕ* et A,B∈$M_{n,p}$. Si B se déduit de A par des opérations élémentaires, alors A et B ont **même rang.**

Lemme: Soient n∈ℕ, n≥2, et A une matrice de permutation. Alors A est produit de transvections et de dilatations.

Prop 5: Pour effectuer une suite d'opérations élémentaires sur une matrice, on peut n'utiliser que des matrices de **transvection et de dilatation**, i.e. que des opérations du type $L_i\to\lambda L_i$, $C_i\to\lambda C_i$, $L_i\to L_i+\lambda L_j$, $C_i\to C_i+\lambda C_j$.

Prop 6: Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$ et $A\in M_{n,p}$. On suppose que la première colonne de A est non nulle.
(i) Il existe des matrices de transvection $M_1,\dots M_r\in GL_n(K)$ telles que :

$$(1)\quad M_1\dots M_r A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p}\\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

avec: $\begin{cases}\alpha_1\neq 0\\ A_1\in M_{n-1,p-1}\\ rg(A)=1+rg(A_1)\end{cases}$

(ii) Il existe des matrices de transvection $M_1,\dots M_s\in GL_n(K)$ telles que :

$$(2)\quad M_1\dots M_s A=\begin{pmatrix}1 & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p}\\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

avec: $\begin{cases}A_1\in M_{n-1,p-1}\\ rg(A)=1+rg(A_1)\end{cases}$

(iii) Il existe des matrices de transvection et de dilatation $M_1,\dots M_t\in GL_n(K)$ telles que $M_1\dots M_t A$ soit de la forme (2).

III. Applications aux matrices inversibles.

Prop 7: Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A\in GL_n(K)$.
(i) Il existe un produit P de matrices de transvection tel que PA soit **triangulaire supérieure.**
(ii) Il existe un produit Q de matrices de transvection tel que QA soit **triangulaire supérieure et de diagonale égale à (1,...1,α)**, avec α=detA.
(iii) Il existe un produit R de matrices de transvection tel que RA soit une matrice **diagonale.**
(iv) Il existe un produit S de matrices de transvection tel que SA soit égale à **diag(1,...1,α)**, avec α=detA.

Cor: (i) Si $A\in GL_n(K)$, Il existe un produit P de matrices de transvection et de dilatation tel que $PA=I_n$.
(ii) Tout élément de $GL_n(K)$ est produit de matrices de transvections et de dilatations.
(iii) Le sous-groupe de $GL_n(K)$ engendré par les matrices de transvection est égal à $SL_n(K)$.

<u>Application</u>: Méthode pour calculer l'inverse d'une matrice $A\in GL_n(K)$. Si par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, on passe de A à I_n, alors par la même suite d'opérations élémentaires on passe de I_n à A^{-1}. Exemple : Si $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&2&-3\\-1&1&-1\end{pmatrix}$.

IV. Application au calcul du rang.

Prop 8: Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$ et $A\in M_{n,p}$ de rang r.
(i) Il existe $P\in GL_n(K)$, $Q\in GL_p(K)$, produits de matrices de transvection, de dilatation et de permutation, tels que PAQ soit de la forme $PAQ=\begin{pmatrix}T&B\\0&0\end{pmatrix}$, avec $T\in GL_r(K)$ triangulaire supérieure, et $B\in M_{r,p-r}$.
(ii) Il existe $P\in GL_n(K)$, $Q\in GL_p(K)$, produits de matrices de transvection, de dilatation et de permutation, tels que $PAQ=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Cor: Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$ et $A,B\in M_{n,p}$. Alors A, B sont équivalentes (6) ssi on peut passer de l'une à l'autre par une suite d'opérations élémentaires.

<u>Exemple:</u> $A=\begin{pmatrix}1&2&-3&1&2\\2&3&-6&5&3\\-3&-4&9&-6&-4\\1&3&-3&1&3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&2&1&2&-3\\0&-1&3&-1&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ sont équivalentes.

V. Application aux systèmes linéaires.

Pour résoudre un **système de Cramer** (système de n équations linéaires à n inconnues dont la matrice M est inversible) avec la méthode "classique" $x_i=\dfrac{\det M_i}{\det M}$, où M_i est obtenue en remplaçant la i° colonne de M par le vecteur-colonne des "seconds membres" des équations linéaires, il faut effectuer $n(n+1)!-1$ opérations.

Grâce à ce qui précède, on dispose d'une méthode plus rapide, **la méthode du pivot de Gauss.**

Prop 9: Soit (L) un système linéaire de n équations à p inconnues et de rang r. Il existe une permutation σ de $[\![1,p]\!]$ telle que (L) soit équivalent à un système (T) de la forme:

$$\begin{cases}a_{11}x_{\sigma(1)}+a_{12}x_{\sigma(2)}+\dots\dots\dots+a_{1p}x_{\sigma(p)}=z_1\\ a_{22}x_{\sigma(2)}+\dots\dots\dots+a_{2p}x_{\sigma(p)}=z_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{rr}x_{\sigma(r)}+\dots+a_{rp}x_{\sigma(p)}=z_r\\ 0=z_{r+1}\\ \dots=\dots\\ 0=z_n\end{cases}$$

avec $a_{ii}\neq 0$ pour $1\leq i\leq r$.

Remarque: La compatibilité de (T) s'écrit $z_{r+1} = \ldots = z_n$.
Si ce système est compatible, $x_{\sigma(1)}, \ldots x_{\sigma(r)}$ en sont les inconnues principales.

On évite de réindexer les inconnues en faisant sur le second membre les mêmes opérations que celles faites sur la matrice.

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -6 & 5 & 3 \\ -3 & -4 & 9 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$ a pour solutions:

$x = -13 + 3\lambda;\ \ y = 4 - \mu;\ \ z = \lambda;\ \ t = 3;\ \ u = \mu$,
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Bilan: La méthode du pivot de Gauss demande au plus $\frac{n\left(4n^2 + 15n - 13\right)}{6}$ opérations.

VI. Notes

Moyennant l'utilisation de la transposée, on pourrait faire ce cours "uniquement sur les colonnes", tout se transpose ensuite sur les lignes.

(1)**Signature d'une permutation.**
Les permutations peuvent se décomposer en un produit de transpositions, c'est-à-dire en une succession d'échanges d'éléments deux à deux.
Une permutation paire est une permutation qui peut être exprimée comme le produit d'un nombre pair de transpositions ;
une permutation impaire est une permutation qui peut être exprimée comme le produit d'un nombre impair de transpositions.
La signature d'une permutation vaut 1 si celle-ci est paire, -1 si elle est impaire. L'application signature constitue un morphisme de groupes. Elle intervient en algèbre multilinéaire, notamment pour le calcul des déterminants.

(2) On a $u_\sigma \circ u_\tau = u_{\sigma\circ\tau}$, $\det u_\sigma = \varepsilon(\sigma)$, $(u_\sigma)^{-1} = u_{\sigma^{-1}}$.

(3)On a:
$M_\sigma M_\tau = M_{\sigma\circ\tau};\ \ \det M_\sigma = \varepsilon(\sigma);$
$(M_\sigma)^{-1} = M_{\sigma^{-1}} = {}^t M_\sigma$

(4)On dit aussi matrice d'affinité de rapport λ.

(5)On a:

$$\left[B_{ij}\right]^{-1} = B_{ij}(-\lambda);\ \ B_{ij}(\lambda) B_{ij}(\mu) = B_{ij}(\lambda + \mu)$$

(6)**Equivalence des n,p matrices**: A et B sont équivalentes ssi ∃ $P \in GL_n(K)$, $Q \in GL_p(K)$, tq B=PAQ.
On montre que A et B sont équivalentes ssi elles ont le même rang.

VII. Bilan.

	permutation	dilatation	transvection
mat M	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
MA	$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_i \to \lambda L_i$	$L_i \to L_i + \lambda L_j$
AM	$C_i \leftrightarrow C_j$	$C_i \to \lambda C_i$	$C_i \to C_i + \lambda C_j$